1 Approximation de $\sqrt{3}$: Suite dé Héron d'Alexandrie

1. f est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ comme somme de fonctions dérivables.
   Pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{1}{2}\left(1 + 3 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{3}{x^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2-3}{x^2}\right)$.
   $f'(x) = 0$ pour $x = \sqrt{3}$.
   $x^2 - 3 \leqslant 0$ pour $0 < x \leqslant \sqrt{3}$ et $x^2 - 3 \geqslant 0$ pour $x \geqslant \sqrt{3}$. Le dénominateur x^2 est positif.
   Donc f est décroissante sur $\left]0\ ;\ \sqrt{3}\right]$ puis décroissante sur $\left[\sqrt{3}\ ;\ +\infty\right[$.

   Calcul des limites aux bornes (voir chapitre 2) :

   $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\frac{3}{x}\right) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{3}{x}\right) = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
   On en déduit le tableau de variation :

x	0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$\sqrt{3}$	↗	$+\infty$

2. Montrons par récurrence sur n que, pour tout entier naturel n, $u_n > \sqrt{3}$.
   (a) Initialisation : $u_0 = 5 > \sqrt{3}$ donc la propriété est vraie pour $n = 0$.
   (b) On suppose la propriété vraie pour un rang n quelconque, donc $u_n > \sqrt{3}$.
   D'après la question précédente, f est croissante sur $\left[\sqrt{3}\ ;\ +\infty\right[$, donc $\sqrt{3} < u_n \Rightarrow f\left(\sqrt{3}\right) < f\left(u_n\right)$.
   Or $f(\sqrt{3}) = \sqrt{3}$ et $\boxed{f(u_n) = u_{n+1}}$ donc $u_{n+1} > \sqrt{3}$
   La propriété est héréditaire
   (c) D'après l'axiome de récurrence, la propriété est vraie pour tout entier naturel n :
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > \sqrt{3}$.
3. Montrons par récurrence que la suite (u_n) est décroissante, c'est-à-dire que $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   Méthode 1 : Recherche du signe de $u_{n+1} - u_n$
   Soit n un entier naturel :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}(\left(u_n + \frac{3}{u_n}\right) - u_n$$

   On réduit au même dénominateur!!!

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}(\frac{3}{u_n} - u_n) = \frac{1}{2} \times \frac{3-u_n^2}{u_n}$$

   Or $u_n > \sqrt{3}$ d'après la question 2) donc $3 - u_n^2 < 0$ d'où $\boxed{\frac{3-u_n^2}{u_n}} < 0$.

   Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n < 0$ donc la suite u est décroissante.

Méthode 2 : Par récurrence

(a) Initialisation : $u_1 = \dfrac{1}{2}\left(5 - \dfrac{3}{5}\right) = \dfrac{22}{10} = \dfrac{11}{5} < 5$ donc $u_1 - u_0 < 0$.

(b) Hérédité : on suppose $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ pour un rang n quelconque. Par conséquent : $\sqrt{3} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.
f est croissante sur $\left[\sqrt{3}\ ;\ +\infty\right[$
donc $f(\sqrt{3}) \leqslant f\left(u_{n+1}\right) \leqslant f\left(u_n\right)$,
c'est-à-dire $\sqrt{3} \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$
donc $\sqrt{3} \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$.
La propriété est héréditaire.

(c) D'après l'axiome de récurrence, la propriété est vraie pour tout entier naturel n : la suite u est décroissante.

4. La suite est décroissante et minorée par $\sqrt{3}$, donc elle converge vers un réel $\ell \geqslant \sqrt{3}$.

5. f est continue, donc ℓ est solution de l'équation $\boxed{f(x) = x}$.
$f(x) = x \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{3}{x}\right) = x \Leftrightarrow \dfrac{x^2+3}{2x} = x \Leftrightarrow x^2 + 3 = 2x^2 \Leftrightarrow x^2 = \sqrt{3}$ qui a pour solutions $-\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}$.
La limite est positive, donc $\boxed{\ell = \sqrt{3}}$.

6. Pour un autre nombre initial $u_0 \in \left]\sqrt{3}\ ;\ +\infty\right[$, la suite converge toujours vers $\sqrt{3}$.

7. Pour $u_0 = \sqrt{3}$, la suite est constante et vaut $\sqrt{3}$, car $u_1 = f(\sqrt{3}) = \sqrt{3}$ et par récurrence, on montrerait facilement que tous les termes sont égaux à $\sqrt{3}$ (évident !).

8. Si $u_0 \in]0\ ;\ \sqrt{3}[$, on a $u_1 = f\left(u_0\right) > \sqrt{3}$ (d'après le tableau de variation de f) et l'on est ramené à la situation du début de l'exercice, à partir de $n = 1$, donc la suite converge encore vers $\sqrt{3}$.

9. Algorithme possible :

Variables	u, p, n
Affectations	$n = 0$ choisir u choisir p
	Tant que $\lvert u - \sqrt{3}\rvert > 10^{-p}$ $u = \frac{1}{2}\left(u + \frac{3}{u}\right)$ $n = n + 1$
Sortie	Afficher n

2 Non convergence de la suite $(\sin(n))$

1. On a : $\boxed{\cos 1 \approx 0,54}$ et $\boxed{\sin 1 \approx 0.84}$.
2. (a) Pour tous a et b,
   $\sin(a+b) = \cos a \sin b + \sin a \cos b$ donc $\boxed{\sin(n+1) = \cos(1)\sin(n) + \cos(n)\sin(1)}$.

   (b) $\sin(n+1) - \sin(n-1) = \cos(1)\sin(n) + \cos(n)\sin(1) - [\cos(1)\sin(n) - \cos(n)\sin(1)] = \boxed{2\sin(1)\cos(n)}$.
3. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sin(n)$ et $v_n = \cos(n)$.
   On suppose désormais que (u_n) a une limite finie ℓ.

   (a) i. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin(n+1) = \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin(n-1) = \ell$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} [\sin(n+1) + \sin(n-1)] = \ell - \ell = 0$.

   ii. Pour tout n, $\sin(n+1) - \sin(n-1) = 2\sin(1)\cos(n)$, donc $\lim_{n\to+\infty}(2\sin 1 \cos n) = 0$.
   Comme $\sin 1 \neq 0$, on a $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \cos n = 0}$.

   (b) $\sin(n+1) = \cos(1)\sin(n) + \cos(n)\sin(1)$ (1.(a)) donc $\lim\limits_{n\to+\infty} [\cos(1)\sin(n) + \cos(n)\sin(1)] = \boxed{\ell\cos 1}$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos n = 0$.
   Or $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \sin(n+1) = \ell}$
   Par **unicité de la limite**, on a $\ell = \ell\cos 1$, d'où $\ell(1 - \cos 1) = 0$; comme $\cos 1 \neq 1$, on a $\boxed{\ell = 0}$.
   Par conséquent : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$

   (c) Pour tout n, $u_n^2 + v_n^2 = \sin^2 n + \cos^2 n = 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(u_n^2 + v_n^2\right) = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(u_n^2 + v_n^2\right) = 0 + 0 = 0$ donc $1 = 0$, ce qui est faux.

   (d) On en déduit que l'hypothèse $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ est fausse : $\boxed{\text{La suite } (\sin n) \text{ n'a donc pas de limite.}}$